УДК 514

10-Е ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ

Стариков Владимир Николаевич
старший преподаватель,
Мичуринский государственный аграрный университет,
г. Мичуринск, Россия.
E-mail: vnst@mail.ru

Аннотация. Сообщаются новые теоремы для треугольника и четырехугольника.

Ключевые слова: геометрия, теоремы, треугольник, четырехугольник.

Введение. В настоящей работе введено сокращение слова: треугольник=**3-к,** четырехугольник=**4-к**. Также окружность здесь будет обозначаться перечислением в круглых скобках всех точек, через которые она проходит.

Пусть A, B, и C – внутренние углы 3-ка или радианные меры этих углов, которые связаны формулой $A+B+C=\pi$. Пусть a, b, и c – стороны 3-ка, лежащие против углов соответственно A, B, и C, R – радиус описанной окружности, S - площадь 3-ка.

Результаты исследований.

Гипотеза о 6 окружностях (см. наше «9-е исследование по геометрии»). На рис. 1 проведены 4 окружности: (A,B,C,D), (G,C,F,D), (M,D,F,P), (N,C,F,Q), проходящие через 4 точки. **Гипотеза утверждает,** что если через 4 точки проходит 5-я окружность (D,C,Q,P), то через 4 точки проходит и 6-я окружность (D,C,N,M). Гипотеза превращается в верное утверждение - теорему в частном случае, если AC и BD - две высоты 3-ка ABG. Предлагалось доказать эту гипотезу в общем случае. Оказывается, что гипотеза существует только в этом единственном случае, когда AC и BD - две высоты 3-ка ABG.

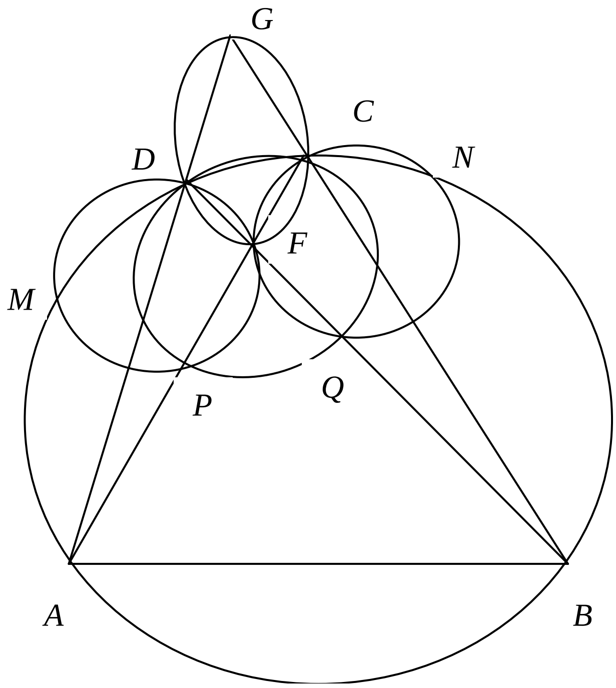

Рис. 1

Доказательство. Действительно, если 4-к $GCDF$ вписан в окружность (G,C,F,D), то $\angle GDF+\angle GCF=\pi$, $\angle GDF=\angle BCF$, $\angle GCF=\angle ADF$. Однако $\angle BCF=\angle BCA=\angle ADF=\angle ADB$ (углы $\angle BCA$ и $\angle ADB$ равны, как 2 угла, вписанные в окружность (A,B,C,D) и опирающиеся на общую дугу AB). Отсюда следует, что $\angle GDF=\angle GCF=\angle BCA=\angle ADB=\pi/2$, что и требовалось доказать.

До- (пред-)- и пост-чевианы. На рис. 2 в 3-ке ABC через точку G проведены 3 чевианы: AE, BF и CD. Тогда точку пересечения G 3 чевиан разбивает каждую чевиану на 2 отрезка прямых, один из них (который начинается в вершине, а заканчивается в точке пересечения G) мы назовем *дочевианой* или *предчевианой,* а второй из них (который начинается в точке пересечения G, а заканчивается в точке его пересечения со стороной, противоположной вершине) мы назовем *постчевианой.* Такие термины мы ввели по аналогии с операторами цикла на их блок-схемах в информатике. Там есть понятия *цикла* соответственно с *пред-* и *пост-условием* в зависимости от того, стоит ли это условие *перед* или *после тела цикла*. У нас в роли *тела цикла* выступает точка G пересечения чевиан, а в роли условия – первый или второй конец отрезка, как вводимого понятия для одной из двух частей чевианы. **Примеры. Первый пример**. Пусть на рис. 2 в 3-ке ABC AE, BF и CD - 3 медианы. Тогда, например, отрезки AG и GE будут называться соответственно *домедианой* (или *предмедианой*) и *постмедианой.* Тогда,

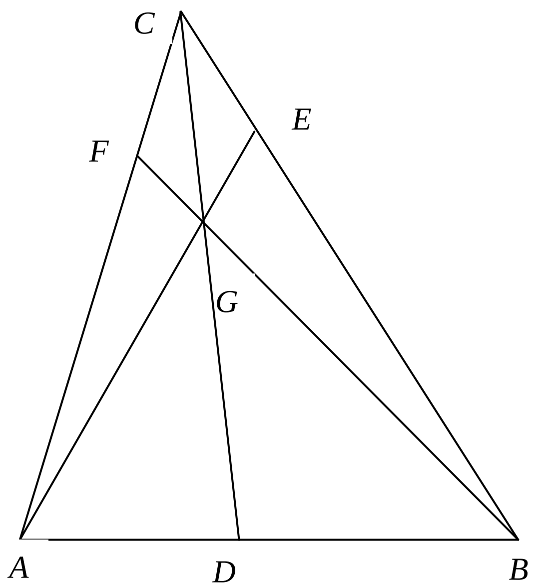

Рис. 2

например, всем известная теорема о точке пересечения медиан будет формулироваться так: в любом 3-ке отношение *домедианы* (*предмедианы*) к *постмедиане* равно 2 или *домедиана* (*предмедиана*) всегда в 2 раза длиннее *постмедианы*.

Второй пример. Пусть на рис. 2 AE, BF и CD - 3 высоты в *остроугольном* 3-ке ABC. Тогда, например, отрезки AG и GE будут называться соответственно *довысотой* (или *предвысотой*) и *поствысотой. Вопрос*: Почему мы здесь подчеркиваем, что 3-к ABC *остроугольный*? *Ответ*: Потому, что если 3-к ABC *не остроугольный*, а *тупоугольный*, 2 из 3 его высот будут лежать вне 3-ка, и рис. 2 будет в принципе неверным. Поэтому мы пока ограничимся случаем *остроугольного* 3-ка ABC (в дальнейшем сформулированное утверждение окажется верным абсолютно для любого 3-ка). Т.к. на рис. 2 AE, BF и CD - 3 высоты в 3-ке ABC, то можно последовательно через следующие четверки точек проводить окружности: 1) через точки A,B,E и F окружность (A,B,E,F) диаметром AB, 2) через точки B,C, F и D окружность (B,C,F,D) диаметром BC, 3) через точки C,A, D и E окружность (C,A,D,E) диаметром CA. В каждой из этих окружностей и во всех вместе будет выполняться цепочка равенств (правило хорд, пересекающихся в общей точке G): $AG\cdot GE=BG\cdot GF=CG\cdot GD$. Последняя цепочка равенств означает доказанную только что следующую теорему: в любом *остроугольном* 3-ке ABC произведение *довысоты* (или *предвысоты*) и *поствысоты* одно и то же для всех 3 высот. Это утверждение верно и для *прямоугольного* 3-ка, ибо в нем 3 высоты пересекаются в вершине прямого угла. Следовательно, все 3 *довысоты* (или *предвысоты*) равны нулю, и указанная выше цепочка равенств выполняется.

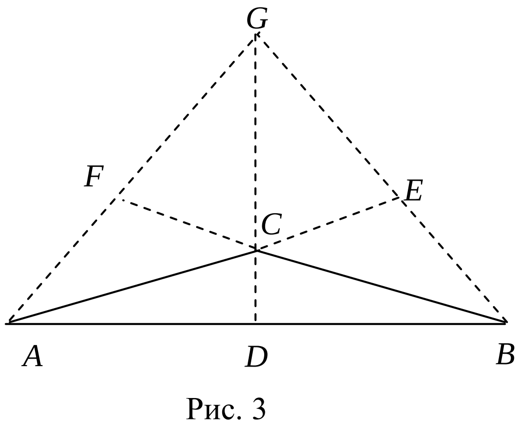

Рис. 3

Докажем теперь эту теорему и для *тупоугольного* 3-ка ABC. На рис. 3 у *тупоугольного* 3-ка ABC 2 высоты AF и BE опущены не на сами стороны соответственно BC и AC, а на их продолжения. Из вершины C на сторону AB опущена обычная высота CD. Все 3 высоты AF, BE и CD пересекаются путем их продолжения вне 3-ка в точке *G*. То, что они пересекаются в 1 точке *G*, следует из того факта, что на рис. 3 в *остроугольном* 3-ке *ABG* в точке *C* проведены 3 перпендикуляра к сторонам, т.е. точка *C* – точка пересечения 3 высот *остроугольного* 3-ка *ABG*. В остроугольном 3-ке 3 высоты всегда пересекаются в 1 точке. Следовательно, и в тупоугольном 3-ке *ABC* 3 высоты всегда будут пересекаться в 1 точке. На рис. 3 через 4 точки *A,B, E* и *F* можно провести окружность (*A,B, E,F*) диаметром *AB.* Тогда по правилу секущих окружности имеем: $AG{\cdot}GF=BG{\cdot}GE$. Естественно *AG*·и *BG*·было бы назвать двумя *довысотами* (или *предвысотами*) *тупоугольного* 3-ка *ABC*, как отрезки прямых, перпендикулярные соответствующим сторонам, начинающиеся в вершинах 3-ка и заканчивающиеся в точке *G* пересечения 3 высот. Аналогично естественно *GF* и *GE*·было бы назвать двумя *поствысотами тупоугольного* 3-ка *ABC*, как отрезки прямых, перпендикулярные соответствующим сторонам, начинающиеся в точке *G* пересечения 3 высот 3-ка и заканчивающиеся в точках их пересечения с этими сторонами, противоположными вершинам. Тогда верная цепочка равенств $AG{\cdot}GF=BG{\cdot}GE$ означает, что в любом *тупоугольном* 3-ке *ABC* произведение *довысоты* (или *предвысоты*) и *поствысоты* одно и то же для 2 высот из 3. Естественно было бы предположить, что это утверждение будет верно и для 3-ей оставшейся высоты *тупоугольного* 3-ка *ABC*. Т.е. $AG{\cdot}GF=BG{\cdot}GE= CG{\cdot}GD$, ибо по смыслу *CG* и *GD* – соответственно *довысота* (или *предвысота*) и *поствысота тупоугольного* 3-ка *ABC*, проведенные из 3-ей вершины *C*. Чтобы наша теорема была верна для любого 3-ка, надо доказать, что на рис. 3 $AG{\cdot}GF=BG{\cdot}GE= CG{\cdot}GD$. Для доказательства на рис. 3 через основания высот *D, E* и *F* остроугольного 3-ка *ABG* проведем окружность, известную, как окружность Эйлера (рис. 4). Как известно, эта окружность пересечет стороны 3-ка *ABG* еще в 3 точках *K, M* и *N*, являющиеся серединами сторон *AB, BG* и *GA*. Т.е. на рис. 4: $AK=KB$, $BM=MG$ и $GN = NA$. По правилу секущих для окружности Эйлера имеем $FG{\cdot}NG=EG{\cdot}MG= DG{\cdot}PG$. Как известно, для окружности Эйлера $PG=GC$ (каждую *довысоту* или *предвысоту* остроугольного 3-ка *ABG* окружности Эйлера делит пополам). Как уже сказано, $NG= AG/2$ (свойство медианы BN) и $MG== BG /2$ (свойство медианы AM). Кроме того, как отмечено выше, $PG= GC/2$ (каждую *довысоту* или *предвысоту* остроугольного 3-ка ABG окружность Эйлера делит пополам, поэтому $PG= GC/2$). С учетом этого правило секущих для окружности Эйлера $FG\cdot NG=EG\cdot MG= DG\cdot PG$ перепишется, как Эйлера $FG\cdot AG/2 =EG\cdot BG /2 = DG\cdot GC/2$. Но это – как раз то, что нам требовалось доказать: $AG\cdot GF=BG\cdot GE= CG\cdot GD$, если предыдущую цепочку равенств умножить на 2. *Теорема полностью доказана*. **Замечание.** Если бы кто-то имел интуицию, веру, убеждение, что эта теорема универсальна и устанавливает не случайные связи, тот бы одновременно открыл бы и окружность Эйлера, свойства которой использованы при ее полном доказательстве.

Угол между *высотой* и *сивысотой,* проведенными из одной вершины 3-ка. Поскольку *теорема Мавло* [1] и *аналог теоремы Мавло для описанной окружности* (см. наше «8-е исследование по геометрии») по сути используют один и тот же угол между *высотой* и *сивысотой,* проведенными из одной вершины 3-ка, найдем значение этого угла. (*Сивысота* совпадает с линией диаметра описанной окружности, проведенным из той же вершины, что и высота). В нашем «9-ом исследовании по геометрии» мы уже нашли этот угол. Теперь найдем его другим способом. На рис. 5 в 3-ке ABC CE – высота, O – центр описанной окружности (A,B,C), CO – часть сивысоты, CD – биссектриса угла ACB. Покажем, что $\angle OCE = |\angle CAB\text{-}\angle ABC|$. Угол $\angle AOC$ – центральный угол описанной окружности (A,B,C), поэтому он равен удвоенному вписанному углу $\angle ABC$ той же ок-

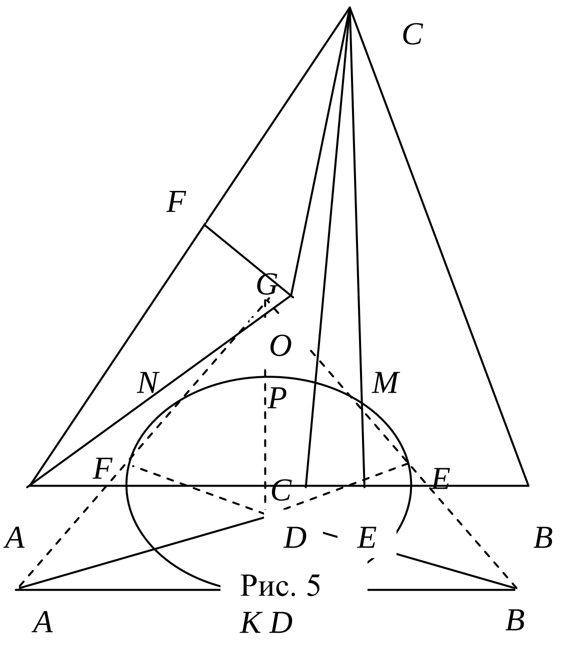

Рис. 5

Рис. 4

ружности, опирающемуся на ту же дугу AC. Если OF - высота равнобедренного 3-ка AOC ($AO = OC = R$), то она и медиана, и биссектриса угла $\angle AOC$. Поэтому $\angle OFC=\pi/2$, $\angle FCO=\pi/2-\angle ABC$, но то же значение $\pi/2-\angle ABC$ имеет угол $\angle ECB$, ибо $\angle CEB=\pi/2$. Поэтому *высота CE* изогонально сопряжена к части *сивысоты CO* относительно биссектрисы CD. Угол $\angle OCE =\angle ACB-2(\angle ECB)= \angle ACB-2(\pi/2-\angle ABC)=\angle ACB+2(\angle ABC)-\pi= (\angle ACB+\angle ABC-\pi)+\angle ABC=\angle ABC-\angle CAB=|\angle CAB-\angle ABC|$, *что и требовалось доказать.* Здесь использовано свойство углов 3-ка: $\angle ACB+\angle ABC+\angle CAB =\pi$. Модуль ставится на случай разных значений углов.

Выводы. По-нашему мнению, рассмотренные вопросы будут полезны геометрам.

Литература:

1. Стариков В.Н. 6-е Исследование по геометрии // Наука и Образование. 2018. - № 2. С. 22.

UDC 514

10-TH RESEARCH ON GEOMETRY

Starikov V. N.,

major teacher.

Michurinsk State Agrarian University,

Michurinsk , Russia,

E-mail: vnst@mail.ru.

Abstract. It is described a new theorems of the triangle, the bilateral.

Keywords (Docuterm): the geometry, theorems, the triangle, the bilateral.