УДК 514.112

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АНАЛОГИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Наталья Александровна Гарминович
кандидат физико-математических наук, доцент
krasaverenei@mail.ru
Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. В статье предлагается использовать аналогию как прием обучения в контексте смыслового значения слова – пропорция, соответствие, соразмерность. Такое узкое применение аналогичности позволит понять основы метода, а, значит, может успешнее применяться при решении сложных задач по планиметрии. Приводятся примеры задач, в решении которых демонстрируется прием аналогии.

Ключевые слова: аналогия, планиметрия, математика, пропорция, задача.

Аналогия (греч. ἀναλογία – пропорция, соответствие, соразмерность) [1] в школьной математике рассматривается как метод, позволяющий переносить рассуждения и заключения по одному объекту на выводы о другом при выполнении определенных условий между параметрами образа и прообраза. Например, система аксиом пространства строится по аналогии с системой аксиом плоскости, а при определении взаимного расположения прямых на плоскости проводят аналогию с расположением прямых в пространстве [4].

Этот метод может быть применен при выборе плана решения, при выполнении действий, доказательстве утверждений. Умозаключение по аналогии является правдоподобным, но не всегда обеспечивает истинность заключения при истинности посылки. Так, если некоторый объект обладает интересующим нас признаком и схож с другим объектом, предположение о существовании выделенного признака у другого объекта может оказаться ложным. Например, предположение Пьера Ферма о виде простого числа 2^{2^n} при любых n доказанное для случаев $n = 1,2,3,4$ не является верным для всех остальных случаев [6, 12]. Метод аналогии является вспомогательным средством для установления истины и постоянно требует проверки и подтверждения.

В зависимости от характера модели и прототипа различают аналогию свойств и аналогию отношений. Если с модели на модель переносится выделенной свойство, то говорят об аналогии свойств, если аналогии уподобляются отношения, причем возможно совершенно различной природы, то определяют аналогию отношений.

Оценивая лишь внешние стороны предмета, создают аналогию по внешней форме (объект и макет), зная устройство объекта, его составные компоненты, создают аналог по структуре; исходя из функциональных особенностей оригинала, подбирают аналог, выполняющий те же функции (функциональный аналог). Определяют аналогию по ситуациям, состоянию явлений или предметов, строят аналогию по свойствам, отвечая на вопрос: какой, какая? Различают личную аналогию (эмпатию) и символическую аналогию, представляющую объект в виде поэтического образа, некоторого преувеличения, раскрывающей его свойства [5, 103].

Мы предлагаем использовать аналогию как прием обучения в контексте смыслового значения слова (пропорция, соответствие, соразмерность). Такое узкое применение аналогичности позволит понять основы метода, а, значит, может успешнее применяться при решении сложных задач. Согласно значению слова, аналогия – это, прежде всего, пропорциональность, применительно к темам геометрии это пропорциональность длин сторон фигур при равенстве углов, т. е. их подобие.

Приведем примеры задач, в решении которых демонстрируется прием аналогии.

Задача 1. Дан треугольник ΔABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC - в точке B_1. Найти длину отрезка A_1B_1, если: $AB = 15см, AA_1 : AC = 2:3$

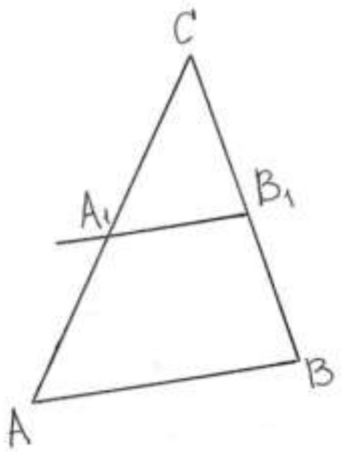

Рисунок 1 - Задача 1

Решение. Прямая A_1B_1 параллельна AB по признаку параллельности. Отсюда следует равенство соответствующих углов треугольников $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC. Значит, по признаку подобия, в плоскости ABC имеем: ΔABC подобен $\Delta A_1B_1C_1$.

Из условия $AA_1 : AC = 2:3$ получаем, что коэффициент подобия треугольников $k = A_1C : AC = \frac{1}{3}$ (AA_1 составляет две части, AC – три, A_1C – одну часть), тогда $A_1B_1 = AB \cdot k = 15 \cdot \frac{1}{3} = 5(см)$

Ответ: $AB = 5см$

В этой задаче подобные треугольники и являются аналогичными. В следующей задаче прием аналогии применяется для доказательства [2, 92].

Задача 2. Три прямые, проходящие через одну точку, пересекают данную плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Доказать подобие треугольников ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$.

Решение.

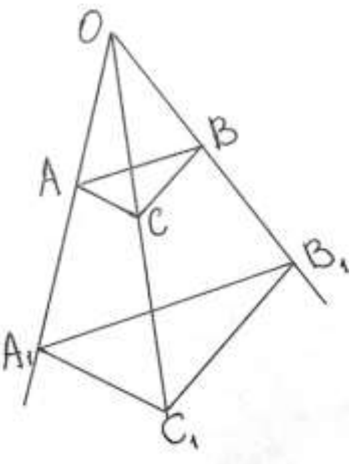

Рисунок 2 - Задача 2

По теореме о свойствах параллельных плоскостей пересекаемых плоскостью имеем следующее: точки пересечения параллельных плоскостей лежат на параллельных прямых, т.е. $AC \parallel A_1C_1, BC \parallel B_1C_1, AB \parallel A_1B_1$.

В треугольниках ΔOAC и ΔOA_1C_1, угол $\angle O$ – общий, $\angle A = \angle A_1 = 180^o - \angle A_1AC$ значит, треугольники ΔOAC и ΔOA_1C_1 подобны. Отсюда следует, что соответствующие стороны треугольников ΔOAC и ΔOA_1C_1 пропорциональны,

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{OC}{OC_1}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников ΔOCB и ΔOC_1B_1 следует

$$\frac{OC}{OC_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OA}{OA_1} \qquad (2)$$

Значит, стороны треугольников пропорциональны

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CB}{C_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \qquad (3)$$

и треугольники ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ подобны.

Рассмотрим более сложные примеры, в которых прием аналогии помогает выбрать способ решения и найти ответ.

Задача 3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ точки C и D принадлежат окружности, точка E является точкой касания стороны AB трапеции с этой окружностью, $AB=14, DC=12$. Найти расстояние от точки E до прямой CD.

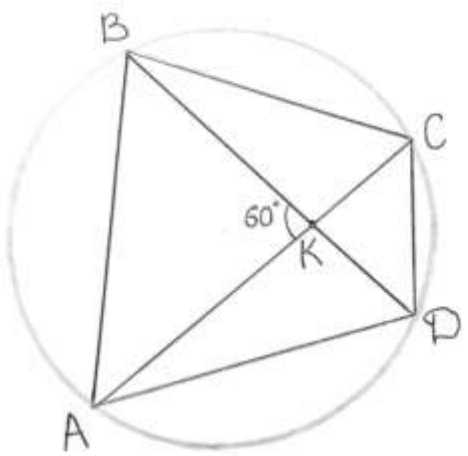

Рисунок 3 - Задача 3

Решение. Обозначим $M-$ точку пересечения прямых AB и CD: $AB\cap CD=M$.

Из точки C опустим перпендикуляр к стороне $AD: CK\perp AD$. Тогда $BC=AK=12, KD=AD-AK=14-12=2$. (4)

В прямоугольных треугольниках ΔMBC и ΔCKD углы равны: $\angle DMC=\angle KCD$, а значит, соответствующие стороны пропорциональны и коэффициент пропорциональности равен: $\frac{BC}{KD}=\frac{12}{2}=6$.

Обозначим, $CD=a$, тогда $MC=6\cdot a$, и, следовательно, $MD=7\cdot a$.

По свойству касательной к секущей, квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть. Имеем, ME – касательная, MD – секущая, MC – внешняя часть секущей:

$$ME^2 = MD \cdot MC, ME^2 = (7 \cdot a) \cdot (6 \cdot a) = 42 \cdot a^2, ME = \sqrt{42 \cdot a^2} = a \cdot \sqrt{42} \qquad (5)$$

Треугольники $\Delta AOE, \Delta FOD$ имеют равные углы: вертикальные углы $\angle AOE = \angle FOD$, прямые углы $\angle OAE = \angle OFD, \Rightarrow \angle AEO = \angle ODF$ и, значит, они подобны.

Из подобия треугольников $\Delta AMD, \Delta EMF$ следует, что

$$\frac{AD}{FE} = \frac{MD}{ME} = \frac{AM}{MF}. \qquad (6)$$

Тогда, $FE = \dfrac{14 \cdot a\sqrt{42}}{7 \cdot a} = 2\sqrt{42}$.

Ответ: $FE = 2\sqrt{42}$ – расстояние от точки E до прямой CD.

Задача 4.Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R, $AB = 25, CD = 16$. Диагонали AB и CD четырехугольника пересекаются в точке K, угол $\angle AKB = 60^o$. Найти радиус R окружности.

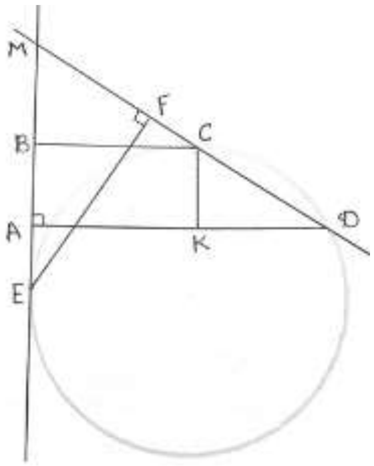

Рисунок 4 - Задача 4

1) $\angle AKB = \angle CKD$ (как вертикальные), $\angle ABK = \angle ACD$ (как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности), значит треугольники ΔABK и ΔCDK подобны.

Коэффициент подобия определяем из отношения подобных сторон:

$$k = \frac{AB}{CD} = \frac{25}{16}. \qquad (7)$$

Обозначим пропорциональные стороны треугольников: $AK = 25 \cdot y; KD = 16 \cdot y; BK = 25 \cdot x; CK = 16 \cdot x$.

2) Рассмотрим $\Delta BCK : \angle BCK = 120^o$. По теореме косинусов имеем:

$$BC^2 = BK^2 + KC^2 - 2 \cdot BK \cdot KC \cdot \cos \angle BKC$$
$$BC^2 = (25x)^2 + (16x)^2 - 2 \cdot 25x \cdot 16x = 1281 \cdot x^2$$
$$BC = x \cdot \sqrt{1281}$$

(8)

3) По теореме синусов для ΔBCK, находим синус угла $\angle BCK$:

$$\frac{BK}{\sin \angle BCK} = \frac{BC}{\sin 120^o}$$

(9)

$$\frac{25x}{\sin \angle BCK} = \frac{x \cdot \sqrt{1281}}{\sin 120^o}$$

(10)

Отсюда следует, что $\sin \angle BCK = \frac{25}{2\sqrt{427}}$

4) Радиус окружности, описанной вокруг четырехугольника равен радиусу окружности, описанной вокруг треугольника $\Delta ABC, \angle BCK = \angle BCA$:

$$R = \frac{AB}{2 \sin \angle BCA} = \sqrt{427}. \qquad (12)$$

Ответ: Радиус описанной окружности равен $R = \sqrt{427}$.

Рассуждения по аналогии имеют большое эвристическое значение, они служат инструментом для построения научных гипотез и могут определять дальнейшее направление решения проблемы [3, 133]. Пониманию идей этого метода и оценке успешности его применения следует обучать школьников на понятных примерах и рассуждениях.

Список литературы:

1. Википедия https://ru.wikipedia.org/wiki/Аналогия

2. Гарминович Н.А. Решение задач на доказательство на занятиях по математике: методический аспект // Электронный научный журнал «Вопросы педагогики». 2021. №10. С. 91-95.

3. Гарминович Н.А., Логинов А.В. О тождестве некоторых научных понятий при изучении математики и лингвистики (на материале вузовского курса дисциплин) // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы LXXIII Международной конференции «Герценовские чтения – 2020» (Санкт-Петербург, 7-10 апреля 2020 г.). СПб.: Изд. РГПУ им. А.И. Герцена. 2020. С. 133-137.

4. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутусов, В.С. Кадомцев и др. М. :Просвещение. 2019. 383 с.

5. Томова Н. Аналогия // Философская антропология. 2020. Т. 6. № 1. С. 102–119.

6. Эмпахер А. Сила аналогии. М.: Мир. 1965. 155 с.

UDC 378.147.227

ON THE USE OF ANALOGY IN SOLVING PROBLEMS IN PLANIMETRY

Natalya. A. Garminovich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

krasaverenei@mail.ru

Michurinsk State Agrarian University

Michurinsk, Russia

Abstract. The article proposes to use analogy as a teaching technique in the context of the semantic meaning of the word - proportion, correspondence, proportionality. Such a narrow application of similarity will make it possible to understand the basics of the method, and, therefore, it can be more successfully used in solving complex problems in planimetry. Examples of tasks are given, in the solution of which the analogy technique is demonstrated

Keywords: analogy, planimetry, mathematics, proportion, problem.

Статья поступила в редакцию 01.11.2022; одобрена после рецензирования 15.12.2022; принята к публикации 20.12.2022.

The article was submitted 01.11.2022; approved after reviewing 15.12.2022; accepted for publication 20.12.2022.