Наука и Образование. Том 7. № 4. 2024 / Материалы Международной научно-практической конференции «Инженерное обеспечение инновационных технологий в АПК»

УДК 530.145: 535.14:517.538.7

АСИПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Анатолий Анатольевич Аникьев[1]
доктор физико-математических наук, профессор
aaanikiev@mail.ru
Эмилия Николаевна Аникьева[2]
старший преподаватель
korol_0909@mail.ru
Семен Антонович Мацко[2]
студент
matsko.sema13@mail.ru
[1]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
г. Москва, Россия
[2]Мичуринский государственный аграрный университет
г. Мичуринск, Россия

Аннотация. Рассмотрены свойства асимптотических рядов, приближающих функции в стандартной теории возмущений в квантовой механике и квантовой теории поля. На примере лагранжиана учитывающего парные и четверные взаимодействие скалярных полей проведены расчеты уравнений движения квазичастиц и получены точные квазиклассические решения.При переходе к полевой теории, асимптотика ряда возмущений может быть получена частичным суммированием асимптотического ряда, построенного набета функции в отличие от суммирования Бореля на гамма функции.

Ключевые слова: лагранжиан, асимптотический ряд, квазичастицы, скалярное взаимодействие.

Введение

Дадим определение асимптотического ряда. Пусть у нас имеется частичная суммаряда, записанного, например, в виде:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k}\ , \qquad (1)$$

и ряд (1) таков, что при фиксированном *z*и $n \to \infty$ ряд расходится $S_n \to \infty$ но при фиксированном *n*и $z \to \infty$ ряд (1) наилучшим образом аппроксимирует некоторую функцию $f(z)$. Это условие может быть записано в виде:

$$\lim_{z \to \infty} \left[f(z) - S_n(z) \right] \cdot z^n = 0 \qquad (2)$$

Такие ряды называются асимптотическими, причем коэффициентами ряда являются числа a_k ,а функции $\varphi_k(z) = \dfrac{1}{z^k}$ в (1) называются асимптотической последовательностью. Цель асимптотического анализа состоит в том, чтобы найти некоторую другую, более простую функцию $\varphi(x)$ которая приближает заданную функцию $f(x)$ в окрестности предельной точки $x \to x_0$ с возрастающей точностью. Лучшее приближение функции может достигаться в нуле, конечном значении или на бесконечности. Полагая вместо (1) общий вид асимптотической последовательности функций как $\{\varphi_k(z)\}$,запишем частичную сумму ряда (1) в виде:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(z) \qquad (3)$$

Приближение функции рядом (3) можно понимать, как асимптотическое разложение функции $f(z)$ по асимптотической последовательности $\{\varphi_k(z)\}$ и записывать в виде:

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(z) \qquad (4)$$

Здесь a_k - произвольные числа, коэффициенты членов ряда, которые надо определить. Поскольку мы говорим о частичной сумме ряда (3), одной из задач использования асимптотических разложений становится вопрос нахождения номера ряда $n = N$ при котором достигается минимальное отклонение ряда от приближаемой функции. В практике таким номером считается член ряда, начиная с которого последующие члены ряда начинают возрастать. Вторая задача - это определение коэффициентов ряда. Если задана асимптотическая последовательность $\{\varphi_k(z)\}$, то коэффициенты разложения функции (4) в окрестности предельной точки $z \to z_0$ находятся однозначно по формуле:

$$a_n = \lim_{z\to z_0}\left[f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\varphi_k(z)\right]\cdot\varphi_n^{-1}(z) \qquad (5)$$

Нужно отметить, что одна и та же функция может иметь несколько асимптотических разложений по разным рядам. С другой стороны,один и тот же асимптотический ряд может быть использован для приближения различных функций.

Основным недостатком классической квантовой теории поля является представление о точечном взаимодействии частиц, а именноэлементарная частица представляет собой некоторое образование, обладающее массой и зарядом, но не обладающее размером. Поэтому,например, при изучении сильных взаимодействий, теория возмущений оказывается не применимой, поскольку константа связи велика. При малых значениях констант взаимодействия последовательные члены ряда возмущений также могут содержать особенности, например, при вычислении параметров электрона с учетом радиационных поправок [1], в ряду теории возмущений имеются членынеограниченно возрастающие при приближении импульса электрона к поверхности светового конуса фотонов ($p = m \cdot c$), - так называемая «инфракрасная» катастрофа. Аналогичная «ультрафиолетовая» катастрофа возникает когда вычисляются поправки к параметрам частиц в области больших импульсов. В случае «инфракрасной» катастрофы в собственно-энергетической части электрона, учитывающего излучение фотонов (радиационные поправки) вводится некая «затравочная» масса фотонов, а для ультрафиолетовой асимптотики в пропагаторе фотонов приходится вводить обрезание по импульсам при больших значениях импульса. В этой связи приходится искать пути выхода за рамки теории возмущений. Таких направлений можно насчитать четыре. Первое – дисперсионные соотношения Крамерса – Кронига, связывающие действительную и мнимую части комплексной функции через интеграл по полюсам типа Коши. В физических процессах комплексной функцией выступает амплитуда двухчастичного рассеяния с её аналитическим продолжением в комплексную плоскость. Обоснованием вывода дисперсионных соотношений выступает принцип причинности и методы теории функций комплексных переменных [2]. Привлекательность этого метода связана с тем, что выражения для амплитуды рассеяния, полученные разложением по степеням константы взаимодействия могут быть непосредственно проверены измеряемыми величинами – эффективным сечением рассеяния в процессах сильных и электромагнитных взаимодействий адронов. Второй путь – применение метода функционального интегрирования по всем возможным траекториям частиц – альтернативная формулировка квантовой механики с помощью интеграла Фейнмана. Этим методом возможно получение неких общих результатов в квантовой теории поля, например, проведение квантования неабелевых (некоммутируемых) калибровочных полей [3], и показать в общем виде, что ряды теории возмущений в квантовой теории поля являются асимптотическими, т.е. не имеют хорошо определенной области сходимости. Третьим методом выходящим за рамки теории возмущений можно считать метод ренормализационной группы. Смысл ренормализационной группы состоит в выделении расходящихся членов ряда теории возмущений в лагранжиане взаимодействия и добавлении в исходный лагранжиан контрчленов, устраняющих расходимости с одновременной перенормировкой входящих в выражение масс, зарядов и констант связи. Может показаться, что этот прием искусственный, как неоднократно говорил об этом Р. Фейнман и сомневаться в его эффективности, но доказательство истинности группы перенормировок позволило принять этот метод в качестве одного из основных при вычислении амплитуд рассеяния частиц методом S–матрицы в главных порядках теории возмущений. В качестве четвертого метода можно принять суммирование основных диаграмм, описывающих пропагаторы и вершинные части частиц с учетом парного взаимодействия во всех порядках разложения свободной энергии по константам взаимодействия. Этот подход аналогичен методу функционального интеграла, но вычисление интеграла бесконечного порядка заменяется здесь на суммирование бесконечного ряда диаграмм во всех порядках взаимодействия [1, 2].

В настоящей работе в рамках квазиклассического подхода на примере взаимодействующих скалярных полей показана возможность получения точных решений для общего вида Лагранжиана без разложения функции действия в ряд теории возмущений по константе взаимодействия [4]. Плотность лагранжиана для системы взаимодействующих скалярных полей с полевыми функциями $\phi_i(x,t)$ имеет вид:

$$\tilde{L}(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\right)^2\right]-U(\{\phi_i\}) \qquad (6)$$

Здесь $U(\{\phi_i\})$ - потенциал, имеющий некоторое количество минимумов в n–мерном пространстве функций. Полевые уравнения тогда будут иметь вид:

$$\left(\frac{1}{\upsilon^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\cdot\phi_i(x,t)=-\frac{\partial U}{\partial\phi_i} \qquad (7)$$

А статические решения определяются уравнениями:

$$\phi_i'' = \frac{\partial U}{\partial \phi_i} \ , \qquad (8)$$

имеющими смысл движения некоторой частицы в пространстве под действием потенциала $U(\{\phi_i\})$. Чтобы решить систему уравнений (8) для физически реального случая необходимо обеспечить условие конечности энергии. Следовательно должны выполняться граничные условия равенства нулю производных полевых функций для всех полей и равенство нулю потенциала на бесконечности. Кроме того то, что мы называем частицей должно иметь некоторую траекторию в пространстве n–измерений, чтобы мы могли найти минимум действия при работе с заданным потенциалом. Для определенности рассмотрим взаимодействие двух скалярных полей.Потенциал возьмем в виде часто используемом в полевой теории:

$$U(\phi_1,\phi_2) = \frac{1}{4}(\phi_1^{\ 2}-1)^2 + \frac{1}{2}m^2\cdot\phi_2^{\ 2} + \frac{1}{4}\lambda\cdot\phi_2^{\ 4} + \frac{1}{2}d\cdot\phi_2^{\ 2}\cdot(\phi_1^{\ 2}-1) \qquad (9)$$

Потенциал (9) в плоскости $\{\phi_1,\phi_2\}$ имеет две стационарные точки $\{-1,0\}$ и $\{1,0\}$, они же являются глобальными минимумами, как показывает анализ матрицы Гессе (9). Разрешенные потенциалом (9) траектории будем искать из уравнения:

$$g(\phi_1,\phi_2)=0$$

Исключение координаты позволит связать форму траектории с потенциалом:

$$\frac{\partial g}{\partial \phi_1}\cdot\phi_1' + \frac{\partial g}{\partial \phi_2}\cdot\phi_2' = 0 \qquad (10)$$

Отсюда:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \phi_1}\right)^2\cdot(\phi_1')^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_2}\right)^2\cdot(\phi_2')^2 \ . \qquad (11)$$

Интегрируя уравнение (8), найдем квадрат производных и, подставляя в (11) получим:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \phi_1}\right)^2 \cdot \left(\int \frac{\partial U(\phi_1,\phi_2)}{\partial \phi_1} \cdot d\phi_1 + C_1\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_2}\right)^2 \cdot \left(\int \frac{\partial U(\phi_1,\phi_2)}{\partial \phi_2} \cdot d\phi_2 + C_2\right) \quad (12)$$

Выберем уравнение траектории в виде полинома по полевым переменным, поскольку потенциал также имеет вид полинома, но ограничимся низшей степенью:

$$g(\phi_1,\phi_2) = (1-\alpha)\cdot\phi_2^{\,2} + \alpha\cdot(\phi_1^{\,2} - 1) \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), интегрируя вдоль траектории начиная с точки минимума, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях полевых функций получаем два решения для параметра α и параметров потенциала (9):

Первое решение.

$$\alpha = \frac{1}{2(m^2-1)}, \quad \lambda = \frac{2(1-6d) + (1-2m^2)\cdot(1-8d)}{4(m^2-1)} \quad (14)$$

Подставляя параметр α в уравнение (13), выражаем из него $\phi_2^{\,2}$ и подставляя полученные значения в (8) находим уравнение для определения ϕ_1

$$\phi_i'' = A\cdot(\phi_1^3 - \phi_1)\,. \quad (15)$$

Здесь $A = 1 + \dfrac{d}{3-2m^2}$

После интегрирования получаем решение для обеих полевых функций:

$$\phi_1(x) = th\left[\frac{1}{2}\sqrt{A}\cdot(x-x_0)\right] \quad (16)$$

$$\phi_2(x) = \sqrt{\lambda + d(3-2m^2)}\cdot sch\left[\frac{1}{2}\sqrt{A}\cdot(x-x_0)\right] \quad (17)$$

Таким образом, мы получили точное решение для полевых функций с потенциалом (9) в виде уединенных волн не прибегая к разложению экспоненты с действием в бесконечный ряд теории возмущений и не ограничиваясь малостью константы взаимодействия полей.

При значении $m=\sqrt{2}$, $\alpha=1/2$ траекторией квазичастицы будет окружность с центром в нуле и радиусом равным единице. При значении $m=\sqrt{14}/3$, $\alpha=0.9$ и траекторией квазичастицы будет эллипс с полуосями 1 и 3. В обеих случаях траектории проходят через точки глобального минимума потенциала. Для потенциала в квантовой теории поля, аналогичного (9) в качестве решения, приближающего точное значение при любой величине константы взаимодействия, используем асимптотический ряд (3), выражаемый через бета – функцию. При m = 0 траектория преобразуется в две ветви гиперболы пересекающие абсциссу в точках глобального минимума, но уходящие на бесконечность. Данное свойство эффективной массы можно трактовать как нарушение симметрии исходного состояния и проявление фазового перехода в новое состояние системы взаимодействующих скалярных полей [3, 4].

Список литературы:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. В 10 т. т. IV. // Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Квантовая электродинамика. М.: Изд-во «ООО Физматлит». 2020. 720 с.

2. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. / 4 –е изд., испр. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984. 600 с.

3. Славнов А.А., Фадеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. 2-е изд. М.: Наука. 1988. 272 с.

4. J. Zinn-Justin. Quantum Field Theory and Critical Phenomena, 3-rd edition, Clarendon Press. Oxford. 1996. 1088 P.

UDC 530.145: 535.14: 517.538.7

ASYPTOTIC SERIES IN THE QUASICLASSICAL APPROXIMATION OF QUANTUM FIELD THEORY

Anatoly An. Anikiev[1]
doctor of physical and mathematical sciences, professor
aaanikyev@mail.ru
Emiliya N. Anikyeva[2]
senior lecturer
korol_0909@mail.ru
Semen An. Matsko[2]
student
matsko.sema13@mail.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University
Moscow, Russia
[2]Michurinsk State Agrarian University
Michurinsk, Russia

Abstract. The properties of asymptotic series approximating functions in standard perturbation theory in quantum mechanics and quantum field theory are considered. The equations of motion of quasiparticles wereresolved and exact semi-classical solutions using the example of a Lagrangian taking into account pair and quadruple interactions of scalar fieldswere obtained. When passing to field theory, the approximation of the perturbation series can be performed by partial summation of the asymptotic series constructed on the beta function, in contrast to the Borel summation on the gamma function.

Keywords: lagrangian, asymptotic series, quasiparticles, scalar interaction.

Статья поступила в редакцию 11.11.2024; одобрена после рецензирования 20.12.2024; принята к публикации 25.12.2024.

The article was submitted 11.11.2024; approved after reviewing 20.12.2024; accepted for publication 25.12.2024.